



**Concursul Național de Matematică
„Olimpiada Satelor din România”**

Etapa județeană, Neamț

14.03.2026

Barem de notare și evaluare

Clasa a V-a

Subiectul 1 (20p)

Fie numărul $A = 3^{2n} \cdot 5^{2n+1} + 3 \cdot 9^n \cdot 25^{n+1} - 3^{2n+1} \cdot 5^{2n+1} \cdot 2$.

a) Arătați că numărul A este divizibil cu 75, oricare ar fi n număr natural nenul.

b) Demonstrați că, pentru orice n, număr natural nenul, numărul A se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte.

Soluție și barem de corectare:

a) $A = 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 5 + 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 25 \cdot 3 - 3^{2n} \cdot 3 \cdot 5^{2n} \cdot 5 \cdot 2 \dots\dots\dots 4p$

$A = 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot (5 + 75 - 30) \dots\dots\dots 3p$

$A = 15^{2n} \cdot 50 \Rightarrow A = 15^{2n-1} \cdot 15 \cdot 50 \Rightarrow a = 15^{2n-1} \cdot 750 \dots\dots\dots 4p$

$750 : 75 \Rightarrow A : 75 \dots\dots\dots 1p$

b) $50 = 3^2 + 4^2 + 5^2 \dots\dots\dots 2p$

$A = 15^{2n}(3^2 + 4^2 + 5^2) \Rightarrow A = (15^n)^2 \cdot (3^2 + 4^2 + 5^2) \dots\dots\dots 2p$

$A = (15^n)^2 \cdot 3^2 + (15^n)^2 \cdot 4^2 + (15^n)^2 \cdot 5^2 \dots\dots\dots 2p$

$A = (15^n \cdot 3)^2 + (15^n \cdot 4)^2 + (15^n \cdot 5)^2 \dots\dots\dots 2p$

Subiectul 2 (25p)

Să se afle toate numerele de patru cifre știind că ultima cifră este o cifră impară, suma cifrelor este egală cu 6 iar suma dintre a doua și ultima cifră este egală cu prima cifră.

Soluție și barem de corectare:

Fie $\overline{abcd}$ numărul de patru cifre, $a+b+c+d=6$ și $b+d=a \Rightarrow a+a+c=6 \Rightarrow 2a+c=6 \dots\dots\dots 2p$

$2a$ -nr par, 6 - nr par $\Rightarrow c$ - nr par, $c \leq 6 \Rightarrow c \in \{0, 2, 4, 6\} \dots\dots\dots 2p$

I. $c=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3 \dots\dots\dots 2p$

$\Rightarrow b+d=3$ și d nr impar $\Rightarrow b$ -nr par $\dots\dots\dots 2p$

b -nr par și $b \leq 3 \Rightarrow b \in \{0, 2\} \dots\dots\dots 2p$

I₁. $b=0 \Rightarrow d=3 \Rightarrow \overline{abcd} = 3003 \dots\dots\dots 2p$

II₂. $b=2 \Rightarrow d=1 \Rightarrow \overline{abcd} = 3201 \dots\dots\dots 2p$

II. $c=2 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2 \dots\dots\dots 2p$

$\Rightarrow b+d=2$ și d -nr impar $\Rightarrow b$ -nr impar $\dots\dots\dots 2p$

b -nr impar și $b \leq 2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow \overline{abcd} = 2121 \dots\dots\dots 2p$

III. $c=4 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \dots\dots\dots 2p$

$\Rightarrow b+d=1$ și d -nr impar $\Rightarrow b$ -nr par $\Rightarrow d=1$ și $b=0 \Rightarrow \overline{abcd} = 1041 \dots\dots\dots 2p$

IV. $c=6 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ imposibil

$\Rightarrow \overline{abcd} \in \{3003, 3021, 2121, 1041\} \dots\dots\dots 1p$



Subiectul 3 (25p)

Sandu, Adrian și Tudor trebuie să descopere un cod pentru a trece la nivelul următor al unui joc. Cei trei și-au împărțit sarcinile astfel:

* Sandu trebuie să afle ultima cifră a numărului $N = 13 \cdot 15^{2026} + 12 \cdot 13^{2026} + 14^{2026}$, aceasta fiind prima cifră a codului.

* Știind că restul împărțirii numărului x la 15 este 7 iar restul împărțirii numărului y la 25 este 11, Adrian trebuie să afle restul împărțirii numărului $2x+6y$ la 30. Acesta reprezintă următoarele două cifre ale codului.

* Tudor trebuie să găsească ultimele două cifre ale codului, acestea fiind numerele prime a și b , în această ordine, care satisfac egalitatea $2a+3b=21$.

Arătați că acest cod, descoperit de cei trei prieteni, este un număr divizibil cu 79?

Soluție și barem de corectare:

Sandu : $u(N) = u(13) \cdot u(15^{2026}) + u(12) \cdot u(13^{2026}) + u(14^{2026}) \dots\dots\dots 1p$
 $u(15^{2026}) = 5 \dots\dots\dots 1p$
 $u(13^{2026}) = u(3^{2026}) \dots\dots\dots 1p$
 $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243 \Rightarrow u(3^{4n+1}) = 3; u(3^{4n+2}) = 9;$
 $u(3^{5n+3}) = 7; u(3^{4n}) = 1 \dots\dots\dots 3p$
 $u(3^{2026}) = u(3^{4 \cdot 506 + 2}) = 9 \dots\dots\dots 1p$
 $u(14^{2026}) = u(4^{2026}); u(4^{2n+1}) = 4; u(4^{2n}) = 6 \Rightarrow u(4^{2026}) = 6 \dots\dots\dots 3p$
 $u(N) = u(3 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 6) = 9 \dots\dots\dots 2p$

Adrian: $x=15a+7, y=25b+11 \dots\dots\dots 2p$
 $2x+6y=30a+14+150b+66=30a+150b+80 \dots\dots\dots 3p$
 $=30(a+50b+2)+20 \Rightarrow$ restul împărțirii lui $2x+6y$ la 30 este 20. $\dots\dots\dots 2p$

Tudor: $3b: 3$ și $21: 3 \Rightarrow 2a: 3 \Rightarrow a = 3 \dots\dots\dots 2p$
 $\Rightarrow 6 + 3b = 21 \Rightarrow b = 5 \dots\dots\dots 2p$
 Codul aflat de cei trei = 92035 ; $92035 = 79 \cdot 1165 \Rightarrow 92035 : 79 \dots\dots\dots 2p$

Subiectul 4 (20p)

De 8 Martie Cristi vrea să dăruiască flori fetelor din clasa sa.

El observă că, dacă ar cumpăra 5 lalele, 6 trandafiri și 4 zambile ar plăti 166 lei iar, dacă cumpără 4 lalele, 3 trandafiri și 5 zambile plătește 122 de lei. Prietenul său a plătit 108 lei pe un buchet cu 3 lalele, 2 trandafiri și 6 zambile.

a) Arătați că prețul unei lalele nu poate fi 9 lei.

b) Știind că în clasă sunt 12 fete și că fiecare primește câte o lalea, două zambile și doi trandafiri aflați ce sumă de bani trebuie să dea Cristi pe flori.

Soluție și barem de corectare:

a) $5l \dots\dots 6t \dots\dots 4z \dots\dots 166$ lei
 $4l \dots\dots 3t \dots\dots 5z \dots\dots 122$ lei
 $3l \dots\dots 2t \dots\dots 6z \dots\dots 108$ lei $\Rightarrow 45lei \dots\dots 6t \dots\dots 4z \dots\dots 166$ lei $\Rightarrow 6t \dots\dots 4z \dots\dots 121$ lei $\dots\dots 2p$
 $6l + 4z = nr$ par ; 121 nr impar $\Rightarrow$ prețul unei zambile nu poate fi 9 lei. $\dots\dots\dots 2p$



$$\begin{aligned} \text{b) } 5l \dots 6t \dots 4z \dots 166 \text{ lei} & \quad 5l \dots 6t \dots 4z \dots 166 \text{ lei} \\ 4l \dots 3t \dots 5z \dots 122 \text{ lei} / \cdot 2 \Rightarrow & \quad 8l \dots 6t \dots 10z \dots 244 \text{ lei} \Rightarrow 3l \dots 6z \dots 78 \text{ lei} \dots \dots \dots 3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5l \dots 6t \dots 4z \dots 166 \text{ lei} & \quad 5l \dots 6t \dots 4z \dots 166 \text{ lei} \\ 3l \dots 2t \dots 6z \dots 108 \text{ lei} / \cdot 3 \Rightarrow & \quad 9l \dots 6t \dots 18z \dots 324 \text{ lei} \Rightarrow 4l \dots 14z \dots 158 \text{ lei} \dots \dots \dots 3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3l \dots 6z \dots 78 \text{ lei} / : 3 & \quad 1l \dots 2z \dots 26 \text{ lei} / \cdot 2 \quad 2l \dots 4z \dots 52 \text{ lei} \\ 4l \dots 14z \dots 158 \text{ lei} / : 2 \Rightarrow & \quad 2l \dots 7z \dots 79 \text{ lei} \Rightarrow 2l \dots 7z \dots 79 \text{ lei} \Rightarrow 3z \dots 27 \text{ lei} \Rightarrow 1z = 9 \text{ lei} \dots \dots \dots 3p \end{aligned}$$

$$1l \text{ alea} = 26 - 18 = 8 \text{ lei} \dots \dots \dots 1p$$

$$5 \cdot 8 \text{ lei} \dots 6t \dots 4 \cdot 9 \dots 166 \text{ lei} \Rightarrow 6t = 166 - 76 \Rightarrow 1t = 15 \text{ lei} \dots \dots \dots 3p$$

$$1l + 2z + 2t = 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 15 = 8 + 18 + 30 = 56 \text{ lei} \dots \dots \dots 2p$$

$$56 \cdot 12 = 672 \text{ lei} \dots \dots \dots 1p$$

Notă: Orice altă soluție corectă în afară de cea din barem se va puncta corespunzător.



**Concursul Național de Matematică
„Olimpiada Satelor din România”
Etapa județeană, Neamț
14.03.2026
Barem de notare și evaluare
Clasa a VI-a**

Subiectul 1. (20 puncte)

- a) Să se determine numerele naturale a, b, c știind că a și b sunt direct proporționale cu 5 și 8 iar b și c sunt invers proporționale cu 3 și 2 iar $10a + 3b - c = 248$.
- b) Aflați numerele naturale x, y, z știind că $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{3}$ și $5x + 2y + 3z = 57$.

Soluție și barem:

a) $\{a, b\}d.p. \{5, 8\} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{8} \dots\dots\dots 2p$

$\{b, c\}i.p. \{3, 2\} \Rightarrow b \cdot 3 = c \cdot 2 \dots\dots\dots 2p$

$\frac{b}{2} = \frac{c}{3} / \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b}{8} = \frac{c}{12} \dots\dots\dots 2p$

$\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = \frac{c}{12} = k \Rightarrow a = 5k, b = 8k, c = 12k \dots\dots\dots 2p$

$10a + 3b - c = 248 \Rightarrow 50k + 24k - 12k = 248 \Rightarrow 62k = 248 \Rightarrow k = 4 \dots\dots\dots 1p$

$a = 20, b = 32, c = 48 \dots\dots\dots 1p$

b) $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{3} = \frac{2x+2y+2z}{14} = \frac{2(x+y+z)}{14} = \frac{x+y+z}{7} = k \dots\dots\dots 2p$

$x + y + z = 7k, x + y = 5k, y + z = 6k, z + x = 3k \dots\dots\dots 3p$

$x = k, y = 4k, z = 2k \dots\dots\dots 2p$

$5x + 2y + 3z = 57 \Rightarrow 5k + 8k + 6k = 57 \Rightarrow 19k = 57 \Rightarrow k = 3 \dots\dots\dots 2p$

$x = 3, y = 12, z = 6 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 2. (20 puncte)

- a) Fie mulțimea $A = \{9, 14, 19, 24, \dots, 2024, 2029\}$.
Determinați cardinalul mulțimii A .
Dacă B este submulțimea primilor 202 termeni ai mulțimii A , arătați că în B există două numere a căror sumă este 2023.
- b) Fie mulțimile $C = \{x \in \mathbb{N} / 2^{2025} < x \leq 2^{2027}\}$ și $D = \{y \in \mathbb{N} / 3^{2023} \leq y < 3^{2025}\}$.
Comparați cardinalele celor două mulțimi.

Soluție și barem:

a) $9 = 5 \cdot 2 - 1, 14 = 5 \cdot 3 - 1, 19 = 5 \cdot 4 - 1, \dots, 2024 = 5 \cdot 405 - 1, 2026 = 5 \cdot 406 - 1 \dots 2p$

$$406 - 2 + 1 = 405 \Rightarrow \text{card}(A) = 405 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dacă } B \text{ are } 202 \text{ termeni, ultimul termen al mulțimii } B \text{ este } 5 \cdot 203 - 1 = 1014 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Penultimul termen al lui } B \text{ este } 5 \cdot 202 - 1 = 1009 \dots\dots\dots 2p$$

$$1004 + 1009 = 2023 \dots\dots\dots 2p$$

b) $x \in \{2^{2025} + 1, \dots, 2^{2027}\} = C \dots\dots\dots 2p$

$$\text{card}(C) = 2^{2027} - (2^{2025} + 1) + 1 = 2^{2027} - 2^{2025} = 2^{2025} \cdot (2^2 - 1) = 2^{2025} \cdot 3 \dots\dots 2p$$

$$y \in \{3^{2023}, \dots, 3^{2025} - 1\} = D \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{card}(D) = 3^{2025} - 1 - 3^{2023} + 1 = 3^{2025} - 3^{2023} = 3^{2023} \cdot (3^2 - 1) = 3^{2023} \cdot 8 = 3^{2023} \cdot 2^3 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{card}(D) = 3^{2023} \cdot 2^3 = 3^{2022} \cdot 3 \cdot 2^3 > 2^{2022} \cdot 3 \cdot 2^3 = 2^{2025} \cdot 3 = \text{card}(C) \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 3. (25 puncte)

Unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O astfel încât $\angle AOB$ este unghi ascuțit, $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt suplementare; $\angle AOB$ și $\angle DOA$ sunt complementare iar $\angle COD = 3\angle AOB$.

- Calculați măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ și realizați desenul corespunzător.
- Arătați că semidreapta $[OA$ este bisectoarea $\angle BOD$.
- Știind că semidreapta $[OE$ este bisectoarea $\angle BOC$, calculați măsura unghiului $\angle AOE$.

Soluție și barem:

a) $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 360 \dots\dots\dots 2p$

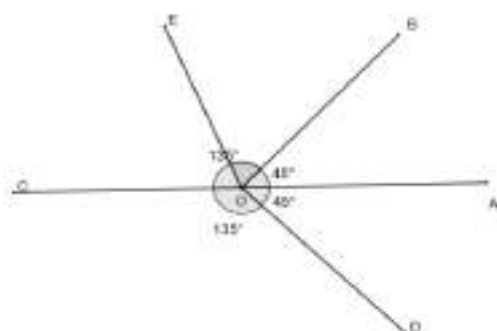
$$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - \angle AOB \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle AOB + \angle DOA = 90^\circ \Rightarrow \angle DOA = 90^\circ - \angle AOB \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle AOB + 180^\circ - \angle AOB + 3\angle AOB + 90^\circ - \angle AOB = 360^\circ \Rightarrow \angle AOB = 45^\circ \dots\dots 2p$$

$$\angle BOC = 135^\circ, \angle COD = 135^\circ, \angle DOA = 45^\circ \dots\dots\dots 2p$$

desenul $\dots\dots\dots 5p$



b) $\angle BOA = \angle AOD = 45^\circ \Rightarrow [OA \text{ bis } \angle BOD \dots\dots\dots 5p$

c) $[OE \text{ este bisectoarea } \angle BOC \Rightarrow \angle BOE = \angle BOC : 2 = 135^\circ : 2 = 67^\circ 30' \dots\dots\dots 3p$

$$\angle AOE = \angle AOB + \angle BOE = 45^\circ + 67^\circ 30' = 112^\circ 30' \dots\dots\dots 2p$$

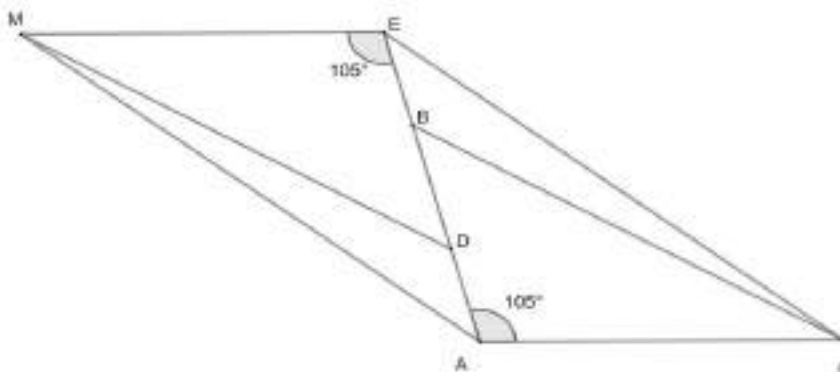
Subiectul 4. (25 puncte)

Fie triunghiul ABC , cu $\sphericalangle A = 105^\circ$ și punctele D și E astfel încât $D \in (AB)$, $B \in (DE)$ și $BE \equiv AD$. În semiplanul determinat de dreapta AB , care nu conține punctul C se ia punctul M astfel încât $EM \equiv AC$ și $\sphericalangle BEM = 105^\circ$. Demonstrați că:

- $MD \equiv BC$
- $AC \parallel ME$
- $MA \equiv EC$

Soluție și barem:

- a) desen.....5p



$ED = EB + BD, BA = DA + BD, EB = DA \Rightarrow ED = BA$3p

$ME \equiv AC, \sphericalangle DEM \equiv \sphericalangle BAC, ED \equiv BA \Rightarrow \text{caz L.U.L.}, \triangle DEA \equiv \triangle BAC$4p

$\triangle DEA \equiv \triangle BAC \Rightarrow MD \equiv BC$3p

- b) $D \in (AB), B \in (DE) \Rightarrow E, B, D, A$ coliniare $\Rightarrow EA$ secantă.....2p

$\sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle EAC$ unghiuri alterne interne $\Rightarrow AC \parallel ME$3p

- c) $\triangle MEA$ și $\triangle CAE$, $ME \equiv AC, \sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle EAC, EA \equiv EA$ (latură comună) $\Rightarrow$

$\text{caz L.U.L.}, \triangle MEA \equiv \triangle CAE$ 3p

$\triangle MEA \equiv \triangle CAE \Rightarrow MA \equiv EC$ 2p

Notă: Orice altă soluție corectă în afară de cea din barem se va puncta corespunzător.



**Concursul Național de Matematică
„Olimpiada Satelor din România”
Etapa județeană, Neamț
14.03.2026
Barem de notare și evaluare
Clasa a VII-a**

Subiectul 1. (20 puncte)

- a) Aflați partea întreagă a numărului $n = \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2026}$.
- b) Arătați că numărul $\sqrt{A}$ este rațional, unde $A = (a+6)(a+7)(a+8)(a+9)+1, a \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem:

a) $n = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{2 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 10} + \dots + \frac{4}{2022 \cdot 2026} \right) = \dots \dots \dots 3p$

$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2026} \right) = \dots \dots \dots 3p$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1012}{2026} = \frac{253}{2026} \dots \dots \dots 2p$

$[n] = 0 \dots \dots \dots 2p$

b) $A = [(a+6)(a+9)][(a+7)(a+8)]+1 \dots \dots \dots 3p$

$A = (a^2 + 15a + 54)(a^2 + 15a + 56) + 1 \dots \dots \dots 3p$

Notăm $a^2 + 15a + 54 = x$ obținem $A = x(x+2)+1 = (x+1)^2 \dots \dots \dots 2p$

Cum A este pătrat perfect pentru oricare a număr real $\Rightarrow \sqrt{A}$ este număr rațional.....2p

Subiectul 2. (25 puncte)

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+2026}{2027} = 2026$.

b) Rezolvați sistemul $\begin{cases} (x+1)(x+4) = y \\ (y+1)(y+4) = z, \text{ unde } x, y, z \in \mathbb{R}. \\ (z+1)(z+4) = x \end{cases}$

Soluție și barem:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+2026}{2027} - 2026 = 0 \dots \dots \dots 1p$

$\left(\frac{x+1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{x+2}{3} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{x+2026}{2027} - 1 \right) = 0 \dots \dots \dots 3p$

$\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} + \dots + \frac{x-1}{2027} = 0 \dots \dots \dots 3p$



Finalizare $x = 1$ 3p

$$b) \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = y \\ y^2 + 5y + 4 = z \\ z^2 + 5z + 4 = x \end{cases} \dots\dots\dots 5p$$

Adunăm cele trei relații și obținem $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 0$ 5p

Finalizare $x = y = z = -2$ 5p

Subiectul 3. (25 puncte)

Se consideră cercul $\mathcal{C}(M, 10\text{cm})$ și coardele AB și CD perpendiculare.

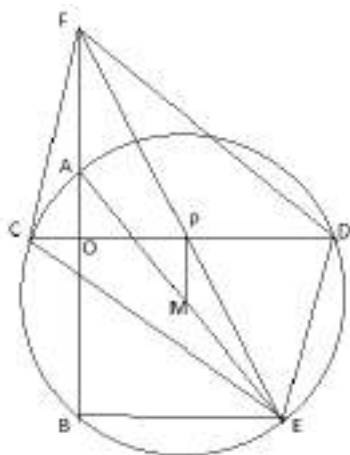
- Dacă distanțele de la centrul cercului la cele două coarde sunt 6 cm respectiv 8 cm, aflați aria patrulaterului ACBD.
- Dacă E este simetricul punctului A față de M, iar F este simetricul punctului B față de CD, arătați că CEDF este paralelogram.

Soluție și barem:

a) $AB = 12 \text{ cm}$ 3p

$CD = 16 \text{ cm}$ 3p

Finalizare $\mathcal{A} = 96\text{cm}^2$ 4p



b)3p

AE diametru $\Rightarrow \triangle ABE$ dreptunghic în B $\Rightarrow CD \parallel BE$ 2p

$AB \cap CD = \{O\}, CD \cap FE = \{P\}$

O mijlocul segmentului BF $\Rightarrow OP$ linie mijlocie în $\triangle FBE \Rightarrow$

P mijlocul segmentului EF4p

PM linie mijlocie în $\triangle AFE \Rightarrow MP \parallel AB \Rightarrow MP \perp CD \Rightarrow$

P mijlocul segmentului CD4p

$\Rightarrow CEDF$ paralelogram2p

Subiectul 4. (20 puncte)

Pe latura (BC) a triunghiului $\triangle ABC$ considerăm un punct oarecare D. Prin D se construiește paralela la AM, M mijlocul lui (BC), care intersectează AB și AC în E respectiv F.

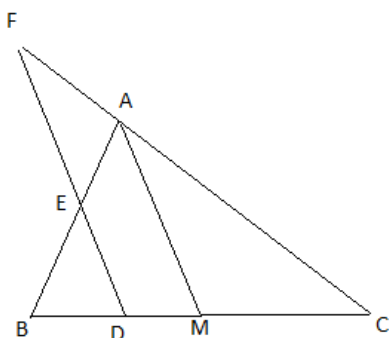


Arătați că:

a) $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$

b) $DE + DF = \text{constant.}$

Soluție și barem:



.....2p

a) $AM \parallel FD \xRightarrow{T.Th} \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{MC}$ 2p

$AM \parallel ED \xRightarrow{T.Th} \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{MB}$ 2p

Finalizare2p

b) $AM \parallel FD \Rightarrow \triangle CAM \sim \triangle CFD$ 2p

$DF = \frac{CD \cdot AM}{BM}$ (1)2p

$AM \parallel ED \Rightarrow \triangle BED \sim \triangle BAM$ 2p

$DE = \frac{BD \cdot AM}{BM}$ (2)2p

(1) + (2) $\Rightarrow DF + ED = 2AM$, constant.....4p

Notă: Orice altă soluție corectă în afară de cea din barem se va puncta corespunzător.



**Concursul Național de Matematică
„Olimpiada Satelor din România”
Etapa județeană, Neamț
14.03.2026
Barem de notare și evaluare
Clasa a VIII-a**

Subiect 1.(20 p)

- a) Determinați cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid \left| \frac{3x+7}{5} \right| \leq 4\}$.
- b) Arătați că, dacă $x \in [-2, 2]$, numărul $N = \sqrt{x^2 - 4(x-1)} + 3\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 2\sqrt{x^2 + 4(x+1)}$ este prim.

Soluție și barem:

a) $\left \frac{3x+7}{5} \right \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \frac{3x+7}{5} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow -20 \leq 3x+7 \leq 20/-7$	3p
$-27 \leq 3x \leq 13 \Rightarrow -\frac{27}{3} \leq x \leq \frac{13}{3} \Rightarrow x \in \left[-9, \frac{13}{3}\right]$	3p
$x \in \mathbb{Z}^* \cap x \in \left[-9, \frac{13}{3}\right] \Rightarrow A = \{-9, -8, \dots, -1, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \text{card}A = 13$	3p
b) $N = \sqrt{(x-2)^2} + 3\sqrt{(x+3)^2} - 2\sqrt{(x+2)^2}$	3p
$N = x-2 + 3 x+3 - 2 x+2 $	3p
$x \in [-2, 2] \Rightarrow x-2 = 2-x, x+3 = x+3, x+2 = x+2$	3p
$N = 3$ număr prim	2p

Subiect 2.(25 p)

- a) Să se determine $[x]$ dacă $x = \left(\frac{9}{2\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-3}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- b) Determinați valoarea expresiei $E_{(x)} = 2 \cdot \sqrt{(x-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2x-\sqrt{3})^2} + |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$, știind că $1 < x < \sqrt{2}$.

Soluție și barem:

a) $x = \left(\frac{9}{2\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-3} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \cdot (6\sqrt{6}) = \frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{6} \cdot 6\sqrt{6} = 27\sqrt{2} - 16\sqrt{3}$	4p
$27\sqrt{2} = \sqrt{1458}$ și $38 = \sqrt{1444} < \sqrt{1458} < \sqrt{1521} = 39$	3p



$16\sqrt{3} = \sqrt{768}$ și $27 = \sqrt{729} < \sqrt{768} < \sqrt{784} = 28$	3p
Se obține $10 < 27\sqrt{2} - 16\sqrt{3} < 11$ pentru că $\{27\sqrt{2}\} < \{16\sqrt{3}\}$, deci $[x]=10$	4p
b) Dacă $1 < x < \sqrt{2}$ avem că $2 < 2x < 2\sqrt{2}$ după care: $x - \sqrt{2} < 0$ și $2x - \sqrt{3} > 0$	4p
$E_{(x)} = 2 \cdot \sqrt{(x - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2x - \sqrt{3})^2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} $ $= 2 x - \sqrt{2} + 2x - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} $	4p
$E_{(x)} = 2\sqrt{2} - 2x + 2x - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$	3p

Subiect 3.(25 p)

Fie piramida patrulateră regulată VABCD. O furnică pleacă din punctul A și ajunge tot în punctul A, mergând pe fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că lungimea parcursă pe fața VAB este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața VBC, determinați măsurile unghiurilor feței VAB.

Realizarea desenului și a desfășurării	3p
În desfășurarea suprafeței laterale obținem triunghiurile VAB, VBC, VCD, VDA'. Punctele M,N,P sunt intersecțiile drumului furnicii cu VB, VC respectiv VD. Lungimea drumului parcurs este minimă dacă punctele A,M,N,P,A' sunt coliniare.	3p
Notăm $\widehat{AVB} = \widehat{BVC} = \widehat{CVD} = \widehat{DVA'} = x^\circ$ $\Delta VAA'$ isoscel, VN bisectoarea $\widehat{AVA'}$ => $VN \perp AA'$	5p
$A_{\Delta VAM} = 2 A_{\Delta VMN}$	4p
$A_{\Delta VAM} = \frac{VA \cdot VM \cdot \sin x}{2}$, $A_{\Delta VMN} = \frac{VM \cdot VN \cdot \sin x}{2}$ => $VA = 2VN$	3p
Aplicând reciproca teoremei unghiului de 30° în ΔVAN dreptunghic => $\widehat{VAN} = 30^\circ$	4p
$\widehat{AVB} = 30^\circ$, ΔVAB isoscel => $\widehat{VAB} = \widehat{VBA} = 75^\circ$	3p

Subiect 4.(20 p)

Un cort sub formă de prismă triunghiulară regulată ABCA'B'C' are $AB=3$ m și $AA'=4$ m. Fie $CD \perp AB$, $D \in AB$.

a) Calculați volumul de aer din cort.

b) Câți metri pătrați de pânză sunt necesari pentru confecționarea cortului, știind că 10% din pânza cumpărată se pierde la tăiat și cusut? (pânza se folosește peste tot)

c) Ajunge un fermoar de 3 m pentru a fi montat de-a lungul segmentului CD?



a) $V = A_b \cdot h = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 9\sqrt{3}$, $V = 9\sqrt{3} \text{ m}^3$	4p
b) $A_{cort} = A_t = 2A_{\Delta ABC} + 3A_{ACC'A'} = \frac{9\sqrt{3}}{2} + 36 = 4,5\sqrt{3} + 36$	4p
$90\% = (36 + 4,5\sqrt{3}) \text{ m}^2$, deci $x = (40 + 5\sqrt{3}) \text{ m}^2$ de pânză trebuie cumpărată	4p
c) AD înălțime în trunghiul echilateral ABC, deci $AD = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ m}$	4p
$1 < \sqrt{3} < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, $1,5 < AD < 3$, ajunge un fermoar de 3m.	4p

Notă: Orice altă soluție corectă în afară de cea din barem se va puncta corespunzător.